SUITES

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration

Soit $I =]A ; +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \in I$.

De plus, il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $u_n \leqslant v_n$.
Soit $n_0 = \max(n_1 ; n_2)$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$ et $u_n \leqslant v_n$.

D'où pour tout $n \geqslant n_0$: $v_n > A$, c'est-à-dire $v_n \in I$. Donc par définition : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Propriété

Si une suite est croissante et admet pour limite L alors la suite est majorée par L.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.
Supposons qu'il existe un entier p tel $u_p > L$.
Comme (u_n) est croissante pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ (1)
$L > L - 1$ et $L < u_p$, donc $I =]L - 1 ; u_p[$ est un intervalle ouvert contenant L.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui contredit le (1).
Donc pour tout n : $u_n \leqslant L$.

Propriété

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit A un réel quelconque.
Puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$ (car sinon tous les termes de la suite seraient inférieurs ou égaux à A et A serait donc un majorant de la suite).
La suite (u_n) étant croissante, on a donc $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ donc pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.
Donc à partir d'un certain rang p tous les termes de la suite appartiennent à $]A ; +\infty[$.

Par définition $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème : Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Démonstration

Soit a un réel strictement positif.
Montrons par récurrence la propriété P_n : $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Etape 1 : Initialisation

$(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0a = 1$ donc $(1 + a)^0 \geqslant 1 + 0a$ et P_0 est vraie.

Etape 2 : Transmission
Supposons la propriété vraie à un rang n : $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.
$(1 + a)^n(1 + a) \geqslant (1 + na)(1 + a)$ car $1 + a > 0$.
$(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)a + na^2 \geqslant 1 + (n + 1)a$ car $na^2 \geqslant 0$.
Donc P_n vraie implique P_{n+1} vraie.

Etape 3 : Conclusion
$(1 + a)^n \geqslant 1 + na, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème

Soit $q \in \mathbb{R}$. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration :
Si $q > 1$, alors il existe un réel $a > 0$ tel que $q = 1 + a$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $q^n = (1 + a)^n$.
Or d'après le théorème précédent, pour tout entier naturel n, $(1 + a)n \geqslant 1 + na$ donc $q^n \geqslant 1 + na$.

Or comme $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

EXPONENTIELLE

Théorème
Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration :
Existence : admise.
Unicité :
Soit g une fonction dérivable $\mathbb{R}$ et telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$.

La fonction $h = \frac{g}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (on a montré précédemment que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et on a : $h' = \frac{g'f - f'g}{f^2}$.

De $f' = f$ et $g' = g$, on en déduit que h' est la fonction nulle donc h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$.

Donc pour tout réel x, $h(x) = 1$, c'est-à-dire $g(x) = f(x)$.
Ainsi $g = f$ et f est bien unique.

Limites usuelles

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstrations :

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x$.

$g'(x) = e^x - 1$.
$g''(x) = e^x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$			$+$		
$g'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Donc $g(x) \geqslant 1 > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0 \Leftrightarrow e^x > x \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

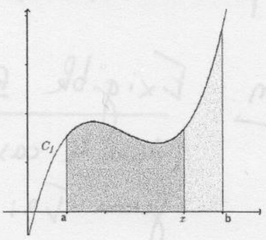
D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

INTEGRATION

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et sa dérivée est la fonction f : $F'(x) = f(x)$.



Démonstration *(cas où f est strictement croissante)* **EXIGIBLE Bac**

- Cas où $h > 0$: On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a\,;\,b]$.

On veut démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

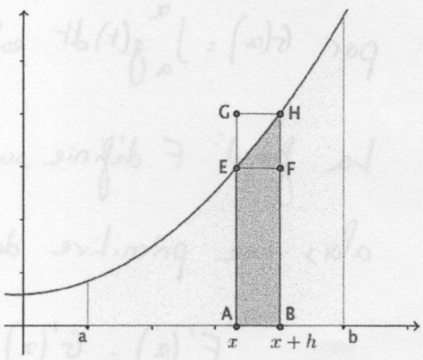
$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx$.

Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire(ABFE) = h \times f(x)$ et $Aire(ABHG) = h \times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a\,;\,b]$, on a :
$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$



Puisque $h > 0$, on a : $f(x) < \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$.

Comme f est continue sur $[a\,;\,b]$, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

- Dans le cas où $h < 0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

On en déduit que $F'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

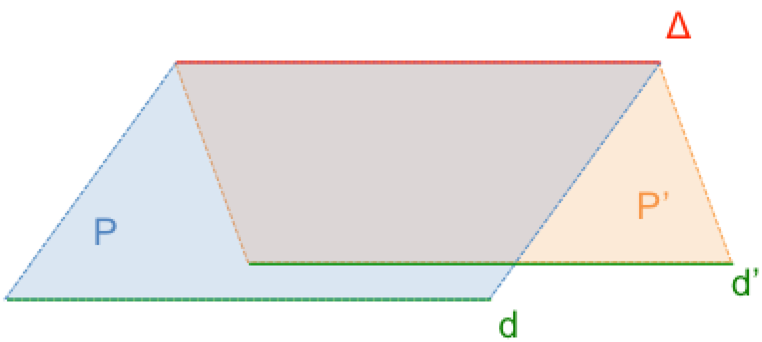
Démonstration :
Dans le cas où la fonction f est continue sur un intervalle fermé [a ; b].

Soit m le minimum de f sur [a ; b].
On considère la fonction g définie sur [; b] par : $g(x) = f(x) - m$.
g est continue (comme somme de fonctions continues) et positive sur [a ; b], donc d'après le théorème fondamental, la fonction G définie par $G(x) = \int_a^b g(x)\,dx$ est une primitive de g sur [a ; b].
Or $f(x) = g(x) + m$ donc une primitive de f sur [a ; b] est la fonction F définie sur [a ; b] par $F(x) = G(x) + mx$ car :
$F'(x) = G'(x) + m$
$F'(x) = g(x) + m$
$F'(x) = f(x) - m + m$
$F'(x) = f(x)$.

GEOMETRIE VECTORIELLE

Théorème du toit

Soient deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ. Si d appartenant à P et d' appartenant à P' sont parallèles, alors ces deux droites sont également parallèles à Δ.



Démonstration :
Les droites (d) et (d') sont parallèles et ont un même vecteur directeur $\vec{u}$.
Les plans P et P' sont dirigés par les couples $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{v}')$, où ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires car P et P' sont sécants.
Notons $\vec{w}$ un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans.
Dans le plan P, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires donc il existe des réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$.
De même dans le plan P', $\vec{u}$, $\vec{v}'$ et $\vec{w}$ sont coplanaires donc il existe des réels α' et β' tels que : $\vec{w} = \alpha'\,\vec{u} + \beta'\,\vec{v}'$.
On en déduit que :
$\vec{w} = \vec{w}$
$\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} = \alpha'\,\vec{u} + \beta'\,\vec{v}'$

$(\alpha - \alpha')\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} = \beta'\,\vec{v'}$

Mais, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires donc : $\alpha - \alpha' = \beta = \beta' = 0$ et $\alpha = \alpha'$.

Et par conséquent, on obtient ; $\vec{w} = \alpha\,\vec{u}$, ce qui signifie que la droite d'intersection des deux plans a le même vecteur directeur que (d) et (d'), elle est donc parallèle à ces deux droites.

PRODUIT SCALAIRE

Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.

Démonstration :

On note $A(x_A ; y_A ; z_A)$ les coordonnées du point A et $(x ; y ; z)$ celles d'un point M quelconque. Alors la relation $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ devient :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$. Ce qui donne :

$ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$. Il reste à poser $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ et on obtient :

$ax + by + cz + d = 0$.

Propriété

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration :

Soit (Δ) une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit (d_1) et (d_2) deux droites du plan (P).

On appelle respectivement $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2).

$\Rightarrow$

Si la droite (Δ) est orthogonale au plan (P), alors par définition, elle est orthogonale à toute droite de ce plan. Ce qui est vrai en particulier pour (d_1) et (d_2).

$\Leftarrow$

On suppose que la droite (Δ) est orthogonale aux droites (d_1) et (d_2).

Les deux droites (d_1) et (d_2) étant sécantes, alors $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ forment une base du plan (P).

Pour toute droite (d_3) du plan (P) de vecteur directeur $\vec{u_3}$, on sait qu'il existe un unique couple de réels a et b vérifiant $\vec{u_3} = a\,\vec{u_1} + b\,\vec{u_2}$.

Alors, on a :

$\vec{u}\,.\,\vec{u_3} = \vec{u}\,.\,(a\,\vec{u_1} + b\,\vec{u_2}) = a\,\vec{u}\,.\,\vec{u_1} + b\,\vec{u}\,.\,\vec{u_2} = 0$

Car on a supposé que la droite (Δ) est orthogonale aux droites (d_1) et (d_2).

Donc la droite (Δ) est orthogonale à toute droite du plan (P).

CONDITIONNEMENT ET INDEPENDANCE

Propriété

Lorsque deux événements A et B sont indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :

A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\,[1 - P(B)] \\ &= P(A)\, P(\overline{B}) \end{aligned}$$

LOI UNIFORME

Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tous réels t et h strictement positifs : $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.

Démonstration :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \frac{P[(X \geqslant t) \cap (X \geqslant t + h)]}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t + h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{1 - P(X \leqslant t + h)}{1 - P(X \leqslant t)} = \frac{1 - F(t + h)}{1 - F(t)}$$

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t + h)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda(t + h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t + h) - (-\lambda t)} = e^{-\lambda h} = 1 - (1 - e^{-\lambda h}) = 1 - F(h)$$

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = 1 - P(X \leqslant h) = P(X \geqslant h).$$

Théorème :

Si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, elle admet pour espérance $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} t \times f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} t \times \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} t \times \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

On cherche alors une primitive de la fonction $g(t) = t \times \lambda e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t}$.

Soit G une primitive de g, on a alors $G(t) = (at + b)e^{-\lambda t}$.

Or $G'(t) = ae^{-\lambda t} + (at + b) \times (-\lambda e^{-\lambda t}) = (-\lambda at + a - \lambda b)\, e^{-\lambda t} = g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

D'où le système :

$$\begin{cases} -\lambda a = \lambda \\ a - \lambda b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ \lambda b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ \lambda b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \quad \text{et } G(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}.$$

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} [G(t)]_0^x = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}\right]_0^x = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[-x\, e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right]$$

$$E(X) = -\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-\lambda x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-\lambda x} = -\frac{1}{\lambda} \lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x\, e^{-\lambda x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{x} = 0$ $(\lambda > 0)$.

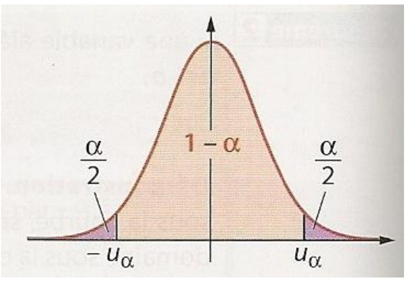
De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

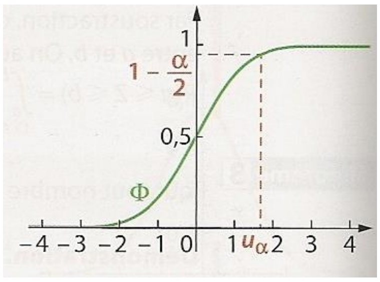
D'où : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

LOI NORMALE CENTRE REDUITE

Théorème

Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$, alors pour tout $\alpha \in]0 ; 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.





Démonstration :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$F(u) = P(-u \leqslant X \leqslant u) = \int_{-u}^{u} \varphi(t)\, dt$.

On constate : $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} F(u) = \lim\limits_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} \varphi(t)\, dt = 1$.

φ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car pour $0 \leqslant u \leqslant v$:

$F(v) - F(u) = 2\int_{u}^{v} \varphi(t)\, dt > 0$.

φ est donc une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\left.\begin{array}{l} F(0) = 0 \\ \lim\limits_{u \to +\infty} F(u) = 1 \end{array}\right\}$ Pour $\beta \in]0 ; 1[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $F(u_\beta) = \beta$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, pour tout $\alpha \in]0 ; 1[$, en posant $\beta = 1 - \alpha$ on a : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

INTEVALLE DE FLUCTUATION

Théorème

Si la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ avec p dans l'intervalle $]0 ; 1[$, alors pour tout α dans $]0 ; 1[$, et pour $I_n = \left[p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} , p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$.

I_n est appelée intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil $1-\alpha$.

La variable $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ correspond à la fréquence de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

<u>Démonstration :</u>

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{n\left(\dfrac{X_n}{n} - p\right)}{n\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} = \dfrac{\dfrac{X_n}{n} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } \frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
&\Leftrightarrow - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} - p \leqslant u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
&\Leftrightarrow - u_\alpha \leqslant \frac{\dfrac{X_n}{n} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \leqslant u_\alpha \\
&\Leftrightarrow - u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace :

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(- u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = P(- u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha)$, où Z suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$; et d'après le théorème précédent : pour tout α dans $]0 ; 1[$, $P(- u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(F_n \in I_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$.

ESTIMATION

<u>Propriété</u>

Soient X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, F_n la fréquence $\dfrac{X_n}{n}$ et J_n l'intervalle aléatoire $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

- Sous les conditions usuelles de précision définies plus haut ($n \geqslant 30$; $np \geqslant 5$; $n(1-p) \geqslant 5$), l'intervalle J_n contient p avec une probabilité **environ égale à 95 %.**
- Pour n assez grand, l'intervalle J_n contient p avec une probabilité **au moins égale à 95 %**.

<u>Démonstration :</u>

Notons que la proposition : $F_n \in I_n$ correspond à la proposition : $p \in J_n$.

En effet : $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Cette propriété découle du 3.1, 3.3 et du 3.6.