Spé maths

Chapitre 1 Divisibilité et congruence

- Si $a|b$ et $b|a$ alors $|a|=|b|$; si $a|b$ alors $ac|bc$
- Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$ (transitivité)
- Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|kb+k'c$ (a divise toute combinaison linéaire de b et c)

Ne pas oublier d'écrire l'**inégalité du reste** dans la division euclidienne.

On note $E(x)$ la partie entière de x tel que $E(x)=q$ avec $q \leq x \leq q+1$ (q entier)

Division euclidienne : $a=bq+r$, $0 \leq r < |b|$

$a \equiv b[n]$ si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$:

- $a+c \equiv b+d[n]$ (compatibilité avec l'addition)
- $ac \equiv bd[n]$ (compatibilité avec la multiplication)
- $a^k \equiv b^k[n]$ (compatibilité avec les puissances)
- Attention : **pas compatible avec la division**

Critères de divisibilité

- Par 2 : nombre pair (se termine par 0, 2, 4, 6, 8)
- Par 3 : la somme des chiffres est divisible par 3
- Par 4 : le nombre formé par le chiffre des dizaines et des unités est divisible par 4
- Par 5 : se termine par 0 ou par 5
- Par 9 : la somme des chiffres est divisible par 9
- Par 10 : se termine par 0
- Par 11 : la différence des chiffres de rang pair avec les chiffres de rang impair est divisible par 11
- Par 25 : se termine par 00, 25, 50, 75

Systèmes de numération

Dans un système de numération en base b, on note un nombre N par :

$N=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}=a_n \cdot b^n+a_{n-1} \cdot b^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot b^1+a_0 \cdot b^0$

Pour convertir, c'est simple : il faut écrire la décomposition en somme de puissances avec $a_i<b$.

Chapitre 2 PGCD, théorèmes de Bézout et de Gauss

On note $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a ; $D(a;b)$ l'ensemble des diviseurs communs de a et b.

$PGCD(a;b)=MAX(D(a;b))$

- $PGCD(a;b)=PGCD(a-kb;b)$
- $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$ (avec r le reste dans la division euclidienne de a par b)

Algorithme d'Euclide : (calcule en un nombre fini d'étapes $PGCD(a;b)$)

1. Calculer le reste r de la division euclidienne de a par b
2. Si r = 0, $PGCD(a;b)=b$
3. Si r ≠ 0, remplacer a par b, b par r, et recommencer. *(→ on calcule $PGCD(b;r)$)*

$PGCD(a;b)$ est le dernier reste non nul.

- $D(a;b)=D(PGCD(a;b))$
- $PGCD(ka;kb)=k\,PGCD(a;b)$ (homogénéité)

$d=PGCD(a;b)$ si et seulement s'il existe a' et b' entiers relatifs premiers entre eux tels que $a=da'$ et $b=db'$.

Identité de Bézout : si $d=PGCD(a;b)$ alors il existe un couple d'entiers relatifs tels que $au+bv=d$. *(la réciproque est fausse ! Et ce couple n'est pas unique.)*

Théorème de Bézout : a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe u et v tels que $au+bv=1$.

Théorème de Gauss : Si $a|bc$ et si a et b sont premiers entre eux, alors $a|c$.
Corolaire *(orthographe réformée)* ***du théorème de Gauss :*** *si $a|c$, $b|c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors $ab|c$.*

Résolution d'équations diophantiennes

Pour résoudre des équations du type : $6x+14y=100$

1. **Existence**
   Cette équation admet des solutions si et seulement si 100 est un multiple de $PGCD(6;14)$.
2. **Résolution de l'équation**
   On simplifie par le PGCD ; on détermine une solution particulière $(x_0;y_0)$; on en déduit les solutions générales.
   $\begin{cases} 3x+7y=50 \\ 3x_0+7y_0=50 \end{cases}$ soit $3(x-x_0)=7(y_0-y)$.
   Or $3|7(y_0-y)$ et 3 et 7 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss $3|(y_0-y)$.
   Soit $y=y_0-3k$.
   On exprime x en fonction de y grâce à la première ligne de l'équation.
3. **Vérification de la réciproque** (important ! Même si ça marche toujours au bac)

Chapitre 3 Les nombres premiers

Nombre premier : possède 2 diviseurs (1 et lui-même) ; un nombre ≥ 2 non premier est composé.

Théorème :
Tout entier naturel ≥ 2 admet au moins un diviseur premier.
Si n est composé, il admet un diviseur premier p tel que $2\leq p\leq\sqrt{n}$. → Contraposée : si n n'admet aucun diviseur premier p tel que $2\leq p\leq\sqrt{n}$, alors n n'est pas composé → **test de primalité**

Théorème : l'ensemble des nombres premiers est infini.

Propriété : si p est premier et n entier naturel, alors soit $p|n$ soit p et n sont premiers entre eux.

Propriété : si p premier divise ab, alors p divise a ou p divise b.

Théorème : tout entier naturel ≥ 2 admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers.

$n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$; $d|n\Leftrightarrow d=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i\leq\alpha_i$

Nombre de diviseurs positifs : $\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$

Si $a=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ et $b=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ alors $PGCD(a;b)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}$ où $\gamma=MIN(\alpha_i;\beta_i)$ et

$PPCM(a;b)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\sigma_i}$ où $\sigma=MAX(\alpha_i;\beta_i)$

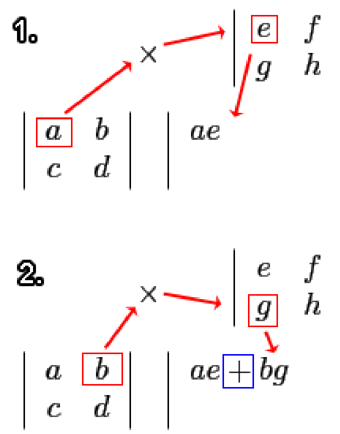
Chapitre 4 Calcul matriciel

Matrice m x n : m lignes et n colonnes.
Matrice 1 x n : matrice ligne
Matrice m x 1 : matrice colonne
Matrice n x n : matrice carrée d’ordre n

O_n : matrice nulle d’ordre n
I_n : matrice unité d’ordre n (contient des 1 sur la diagonale principale, de haut-gauche vers bas-droite)

Addition : on additionne les coefficients entre eux
Multiplication par un réel k : on multiplie tous les coefficients par k
Multiplication de deux matrices A et B :
C’est possible si A est de taille m x *n* et B de taille *n* x p.

Si C = AB, alors $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. *(En gros : pour calculer le coefficient ligne i colonne j, on multiplie la ligne i de A par la colonne j de B.)*



Attention : AB ≠ BA ! De même, A(B+C) ≠ (B+C)A.

Puissances de matrices carrées : $A^n=\prod_{i=1}^{n} A$; $A^0=I_n$

Inverse d’une matrice carrée A : A^{-1} est telle que $A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}\,A$.
Toute matrice n’est pas inversible !

Une matrice carrée A d’ordre 2 telle que $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si son déterminant ad – bc ≠ 0.

Système matriciel tel que $AX=B$ d’inconnue X : alors $X=A^{-1}B$.

Exemple : $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=17 \end{cases} \Leftrightarrow AX=B$; $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale D : $d_{ij} = 0$ pour i ≠ j

A est **diagonalisable** s’il existe P inversible et D diagonale tel que $A=PDP^{-1}$ *(avec A, P et D des matrices carrées d’ordre p)*

Si D est diagonale : $D^n=(d_{ij}^n)$
Si A est diagonalisable : $A^n=P\,D^n\,P^{-1}$

Chapitre 5 Matrices et suites

Suites de matrices colonne

U_n, B et C sont des matrices colonne de taille p ; A est une matrice carrée d’ordre p.

Si $U_{n+1}=AU_n$, alors on a $U_n=A^n U_0$.

Si $U_{n+1}=A\,U_n+B$ et s'il existe C telle que $C=AC+B$, alors $U_n=A^n(U_0-C)+C$.

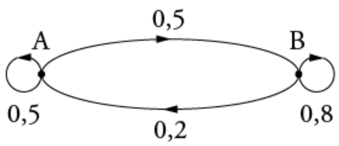
Remarque : $C=AC+B \Leftrightarrow C-AC=B \Leftrightarrow (I_p-A)C=B \Leftrightarrow C=(I_p-A)^{-1}B$

Suites de matrices ligne

Si $V_{n+1}=V_n A$, alors on a $V_n=U_0 A^n$.

Si $V_{n+1}=V_n A+B$, et s'il existe C telle que $C=AC+B$, alors $V_n=(V_0-C)A^n+C$.

Marches aléatoires



La somme des probabilités des flèches partant d'un même sommet est 1.

L'état probabiliste P_n est une matrice ligne/colonne **stochastique** (çad tous coefficients compris entre 0 et 1, de somme égale à 1).

Matrice de transition M

P matrice ligne : m_{ij} est la probabilité de passer de l'état i à l'état j. $P_{n+1}=P_n M \Leftrightarrow P_n=P_0 M^n$

P matrice colonne : m_{ij} est la probabilité de passer de l'état j à l'état i. $P_{n+1}=M\,P_n \Leftrightarrow P_n=M^n P_0$